

Sommaire

0.1	Introduction	3
1	Notions fondamentales sur les écoulements des fluides	6
1.1	Introduction	6
1.2	L'état fluide	6
1.2.1	Propriétés d'un fluide	6
1.2.2	Le modèle continu	8
1.3	Description d'un fluide	10
1.3.1	Description de Lagrange	10
1.3.2	Description d'Euler	10
1.4	Equation de conservation de la masse	14
1.4.1	Lignes et fonctions de courant	16
1.5	Equation de mouvement	17
1.5.1	Equation d'Euler	17
1.5.2	Equation de Bernoulli	18
1.5.3	Ecoulement irrotationnel	20
1.5.4	Ecoulement potentiel	20
1.6	Ecoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible	21
1.7	Ecoulement à la base de la théorie de la variable complexe	22
1.8	La transformation conforme	23
1.8.1	Quelque transformation classique:	23

1.8.2	Transformation de Schwartz -Christoffel	24
2	Ecoulement à surface libre au dessus obstacle polygonal	28
2.1	Introduction	28
2.2	Formulation du problème	29
2.3	Résolution du problème	32
3	Annexe	39
3.1	Outils mathématiques de la théorie des champs:	39

0.1 Introduction

La mécanique des fluides en l'étude du repos et du mouvement des liquides et des gaz. Il s'agit d'une branche de la mécanique des milieux continus qui soulève de nombreux problèmes que doit résoudre l'ingénieur, et ce, dans des domaines divers. On peut mentionner les problèmes d'écoulements des liquides dans les conduites ou les canaux, les écoulements d'air autour d'ailes de fuselages d'avions, dans les tuyères, les problèmes posés par le calcul des compresseurs et turbomachines, le dimensionnement des échangeurs thermiques, ect...

De même, on ne peut passer sous silence les problèmes rencontrés en acoustique, en météorologie, en océanographie

Applications de la mécanique des fluides intéressent aussi la médecine, la biomécanique et l'étude des machines pour la conversion de l'énergie du vent les éoliennes.

Le problème classique de l'écoulement aérodynamique d'un fluide parfait a été étudié par beaucoup de chercheurs.

Des premiers travaux dans ce secteur sont caractérisés par l'utilisation de la méthode de hodographe et de la formule de Schwartz-Christoffel, qui peuvent traiter les écoulements qui ont une géométrie polygonale.

Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement à surface libre au dessus obstacle polygonal

L'écoulement est supposé bidimensionnel et stationnaire irrotationnel c'est à dire écoulement potentiel, et effets de gravité et de tension de surface sont négligées. Théoriquement, on peut calculer la solution exacte en utilisant une transformation conforme d'hodographe due à Kirchoff(1869) et la transformation de Schwartz-Christoffel.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres:

Dans le premier chapitre, présente les notions fondamentales sur les écoulements des fluides

Dans le second chapitre, on considère que les effets des forces de gravité et les tensions de surface sont nuls, on utilise alors la méthode des lignes des courants libres introduites

par Kirchhoff qui est basée sur les transformations conformes pour obtenir une solution exacte.

On utilise le théorème de Schwartz_Christoffel qu'elle nous permet de trouver toujours une transformation conforme qui transforme l'intérieur d'un polygone en demi-plan supérieur(ou inférieur) d'un autre plan.

Chapitre 1

Notions générales sur la mécanique des fluides

Résumé

Dans ce chapitre, on présente les notions générales et l'équation générale du mouvement des fluides ainsi que les écoulements bidimensionnels, irrotationnel stationnaire.

CHAPITRE 1

Notions fondamentales sur les écoulements des fluides

1.1 Introduction

Un fluide en mouvement sera supposé mécaniquement parfait s'il est non visqueux et non conducteur de la chaleur. Il ne présente pas de viscosité si les forces d'interaction entre les divers éléments macroscopiques de fluides sont nulles. L'écoulement d'un fluide parfait se fait alors sans dissipation d'énergie, ni mécanique en raison de sa viscosité nulle, ni thermique en raison de sa conductivité thermique nulle dans notre étude, alors, on considère le fluide comme parfait.

1.2 L'état fluide

1.2.1 Propriétés d'un fluide

L'état fluide caractérise un état de la matière. Les liquides, les gaz ainsi que les plasmas ont les propriétés d'un fluide. Pour décrire l'état fluide adoptons deux points de vue :

Point de vue macroscopique: Un fluide est un système déformable sans forme propre.

◊ **L'état liquide** : les liquides sont des fluides très peu compressibles et ont donc un volume propre.

En première approximation on pourra considérer la masse volumique invariable.

$$\boxed{\boxed{\text{Approximation : } \mu \approx \text{constante}}}$$

Ce qui revient à considérer que la compressibilité ainsi que le coefficient de dilatation est nulle :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} \Big|_T \approx 0 \text{ Pa}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \Big|_P \approx 0 \text{ K}^{-1}$$

Bien sûr, ces grandeurs ne sont pas nulles mais faibles. On retiendra que rigoureusement $\alpha = \alpha(T, P)$ et $\chi_T = \chi_T(T, P)$ mais que pour de faibles variations de pression (quelques bar) et de faibles variations de température (100°C) la masse volumique est quasi constante (sauf si l'on passe par une transition de phase).

◊ **Les gaz** : à l'inverse des liquides, les gaz sont très compressibles ($\mu = \mu(P, T)$). Pour un gaz parfait, on a

$$\boxed{\boxed{\text{Approximation du gaz parfait : } \chi_T = \frac{1}{P}}}$$

Point de vue microscopique : Fondamentalement, un fluide se caractérise par l'absence d'ordre à longue portée (contrairement aux cristaux) et par l'existence d'un chaos moléculaire (contrairement aux solides). Certains systèmes peuvent présenter un ordre à longue portée suivant une seule direction ; c'est le cas des cristaux liquides par exemple.

◊ **Les gaz** : dans un gaz les particules interagissent peu, l'énergie est avant tout cinétique. Les distances intra-atomiques sont grandes ce qui explique qu'on puisse comprimer les gaz.

◊ **Les liquides** : dans un liquide les interactions (l'interaction de Van der Waals, la liaison hydrogène, l'interaction électrostatique dans une solution électrolytique etc. ...) jouent un rôle clé. L'interaction est telle que les molécules sont quasi en contact ce qui explique le caractère quasi-incompressible des liquides.

1.2.2 Le modèle continu

Avant toute chose, on doit se donner une échelle de description. l'échelle macroscopique n'est pas adaptée notamment parce que le fluide n'est pas solide (système que l'on peut décrire dans son ensemble à l'aide du vecteur rotation et du vecteur vitesse du centre d'inertie). À l'échelle microscopique les grandeurs varient de façon discontinue et imprévisible. On décide alors de décrire le fluide à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et macroscopique : on parle d'échelle mésoscopique .

On considère, autour d'un point M , un volume $\delta\tau$ petit par rapport à l'échelle macroscopique et grand par rapport à l'échelle microscopique .Typiquement un volume de $1\mu m^3$ convient. Ce volume contient un grand nombre de particules ce qui permet de définir des grandeurs moyennes qui elles vont évoluer de façon continu. On définira alors des grandeurs moyennes locales :

La masse volumique locale en M : $\mu(M, t) = \frac{\delta m}{\delta\tau}$, où δm est la masse de l'ensemble des particules $\delta\tau$ dans , à l'instant t .

la vitesse moyenne locale en M : $\overrightarrow{v}(M) = \langle \overrightarrow{v_i} \rangle$ où $\overrightarrow{v_i}$ est la vitesse d'une particule microscopique $\delta\tau$ dans à l'instant t .

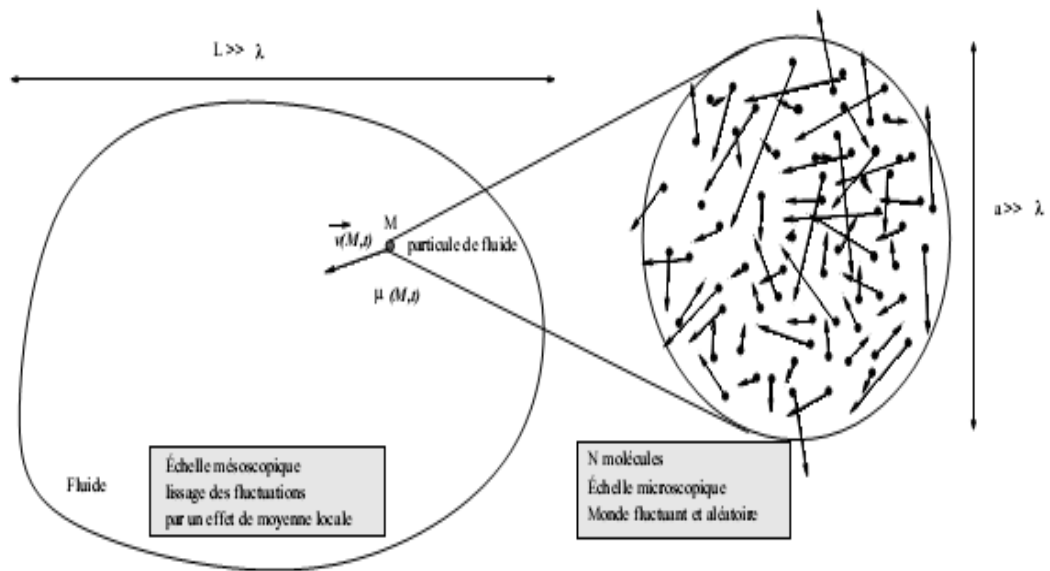


Fig 1 .1 : Modèle continu du fluide

1.3 Description d'un fluide

1.3.1 Description de Lagrange

Considérons une particule de fluide P , placé en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à l'instant t_0 . Dans la description de Lagrange, on suit le mouvement d'une particule de fluide. Par exemple, la particule de fluide dont il est question précédemment, sera en $M(x, y, z)$ à l'instant t . On peut déterminer la trajectoire de la particule de fluide si l'on connaît les fonctions:

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

La vitesse de la particule s'écrit :

$$\vec{v}(P) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Description de Lagrange => Trajectoire des particules de fluide

1.3.2 Description d'Euler

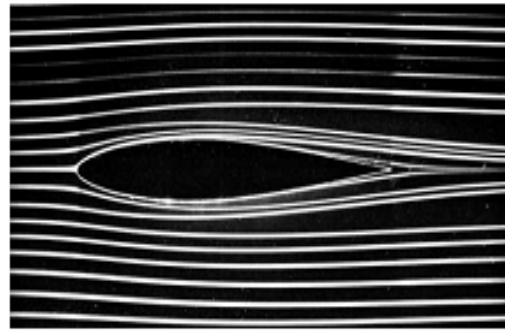
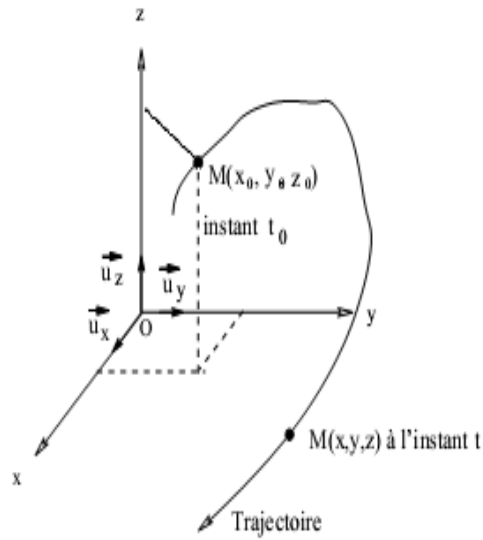
L'approche d'Euler est à mettre en parallèle avec l'approche de Maxwell en électromagnétisme. De la même manière que l'on définit le champ électromagnétique en tout point de l'espace, à un instant t , ici, on va considérer le fluide dans son ensemble à l'instant t . On définit en chaque point du système les grandeurs : $\mu(x, y, z, t), P(x, y, z, t), v(x, y, z, t)$ etc... Ainsi, à un instant t , on peut représenter les champs scalaires (μ et P) à l'aide

d'iso-surface (isobares et iso-densité), et les champs vectoriels (vitesse et accélération) à l'aide des lignes de champ.

Notion de ligne de courant : Une ligne de courant est une ligne de champ du vecteur vitesse c'est-à-dire une courbe tangente en tout point $M(x, y, z)$ à $v(x, y, z, t)$ à l'instant t . L'ensemble des lignes de courant peut évoluer au cours du temps. L'équation de la ligne de courant s'obtient en résolvant les équations différentielles suivantes.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{\omega}$$

<i>Description d'Euler => Ligne de courant</i>



(a) *Visualisation de la trajectoires des particules autour d'un obstacle*

Fig 1.2 : Trajectoire d'une particule de fluide .

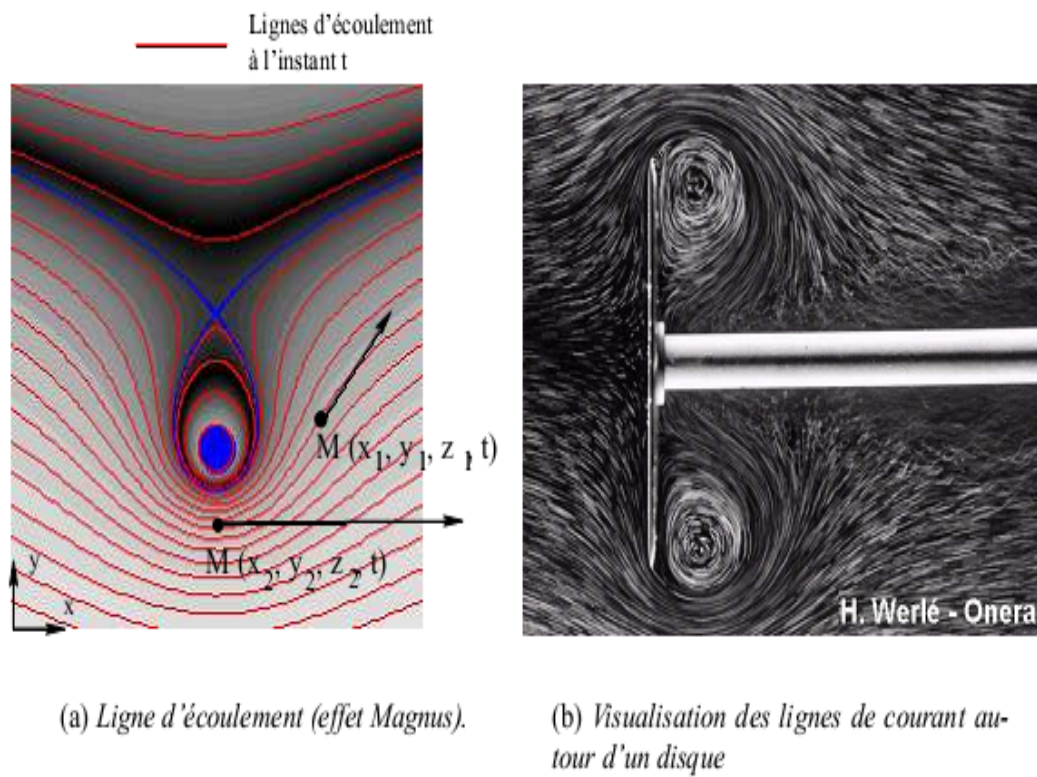


FIG 1.3 : Notion de ligne de courant .

1.4 Equation de conservation de la masse

Le principe de conservation de masse est appliqué sur un élément de volume de l'espace, ce principe impose que l'augmentation de masse pendant un certain temps t du fluide contenu dans ce volume, doit être égale à la somme des masses de fluide qui y entrent, diminuée de celles qui sortent. La masse contenue dans le volume ϑ à l'instant t est égale à :

$$M = \int \int \int_{\vartheta} \rho(M, t) d\vartheta.$$

ρ étant la masse volumique de fluide la quantité de masse, par unité temps et de surface qui s'écoule à travers une surface, est égale au produit de la vitesse normale à cette surface par la masse volumique :

$$\int \int_s (\rho \vec{V}) \vec{u}_\eta ds.$$

D'autre part, la variation de la quantité du fluide contenue dans ce volume est donnée par :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{\vartheta} \rho d\vartheta.$$

Puisque la masse sortante et entrante est égale à la variation de la masse à l'intérieur du volume ϑ on a identité :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{\vartheta} \rho d\vartheta = - \int \int_s (\rho \vec{V}) \vec{u}_\eta ds$$

D'après le théorème d'intégrale de Gauss :

$$\int \int_s (\rho \vec{V}) \vec{u}_\eta ds = \int \int \int_{\vartheta} \operatorname{div} (\rho \vec{V}) d\vartheta$$

On obtient :

$$\int \int \int_{\vartheta} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right) d\vartheta = 0$$

Le domaine étant arbitraire , on a donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (1.1)$$

Cette équation qui traduit la conservation de la masse est aussi référée comme équation de continuité , c'est -à-dire , il n'y a ni apparition, ni disparition de fluide au cours du mouvement.

On peut simplifier l'équation (1.1) :

Nous avons :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \rho \cdot \operatorname{div}(\vec{V}) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho).$$

Alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \operatorname{div}(\vec{V}) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho).$$

Et donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0.$$

Un fluide est incompressible lorsque sa masse volumique est invariable

$$\rho = Cste.$$

l'équation de continuité se reduit alors , dans le cas d'un écoulement conservatif d'un *fluide incompressible* à :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0. \quad (1.2)$$

1.4.1 Lignes et fonctions de courant

La ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse en ce point.

La définition d'une ligne de courant est donnée par les équations :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{\omega}$$

Dans le cas d'un écoulement plan l'équation est réduite à :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

Où u, v sont les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$.

On notera que les surfaces des frontières solides fixes sont toujours des lignes de courant, puisque l'écoulement ne peut pas traverser des surfaces solides.

Dans le cas des écoulements bidimensionnels, le concept de lignes de courant peut être rattaché à l'équation de continuité on se limite au cas des écoulements des fluides incompressibles.

L'équation de continuité s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Cette équation sera satisfaite automatiquement si on introduit une nouvelle fonction ψ définie par les équations suivantes:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ψ est une fonction de x et y que l'on nomme fonction de courant. Les composantes de vecteur vitesse u et v , déterminées par ces équations, satisfont automatiquement l'équation de continuité.

La différentielle exacte de ψ donne :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy.$$

dans le cas où $\psi = 0$ on trouve l'équation de ligne de courant .

on déduit alors, que les courbes pour lesquelles $\psi = Cste$ sont des lignes de courant.

1.5 Equation de mouvement

Les forces qui agissent sur une particule d'un fluide sont de deux types :

◇ forces intérieures : d'origine moléculaires : elles sont opposées deux à deux donc leurs résultantes sont nulles.

◇ forces extérieures : sont des forces de volume ou des forces de surface.

la forme de l'équation qui gouverne le mouvement d'une particule de fluide dépend des forces que l'on doit considérer

comme équation, on a :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{d\vartheta} \sum \vec{F}_{ext}.$$

d'où

$$\rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \frac{1}{d\vartheta} \sum \vec{F}_{ext}.$$

1.5.1 Equation d'Euler

Soit ϑ domaine délimité par une surface S . La résultante des forces surfaciques s'exerçant sur ce volume est donnée par l'intégrale :

$$- \iint_S P \vec{u}_\eta ds.$$

Où P est la pression.

En transformant l'intégrale de surface en une intégrale de volume.

Nous obtenons :

$$- \iiint_S P \vec{u}_\eta ds = - \iiint_{\vartheta} \overrightarrow{\text{grad}} P d\vartheta.$$

Cette égalité montre que l'élément de volume du fluide est soumis à la force ($\overrightarrow{\text{grad}} P$) exercée par le fluide environnant.

Dans le cas où on ne considère que les forces surfaciques, l'équation de la balance des forces s'écrit alors :

$$\int \int \int_{\vartheta} \rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) d\vartheta = - \int \int \int_{\vartheta} \overrightarrow{\text{grad}} P d\vartheta.$$

Le domaine étant arbitraire , on aura donc :

$$\rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P \quad (1.3)$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ (champ de pesanteur, champ magnétique,...etc.), chacun de ses éléments de volume est encore soumis à la force $\vec{F}_{\text{champ}}$

Cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation (1.3) de sorte que l'équation (1.3) doit s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{F}_{\text{champ}}$$

Cette équation a été établie par L'Euler (1755).

1.5.2 Equation de Bernoulli

A partir de l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et parfait.

et lorsque les forces de volume dérivent d'un potentiel $\vec{F}_{\text{champ}} = \overrightarrow{\text{grad}} \mu$.

On a :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \overrightarrow{\text{grad}} \mu.$$

On rappelle l'identité vectorielle :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V}.$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \overrightarrow{\text{grad}} \mu.$$

On a alors :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mu \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0 \quad (1.4)$$

On rappelle la forme du vecteur tourbillon :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = (\vec{\nabla} \times \vec{V}).$$

Dans le cas d'un écoulement permanent (un écoulement du fluide est dit stationnaire ou permanent lorsque la vectrice vitesse V reste constante dans le temps en importe quel point de l'espace occupé par le fluide).

C'est à dire :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$$

L'équation (1.4) s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mu \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \times \vec{V} = 0.$$

Sur une ligne de courant de vecteur unitaire $\vec{s}$, on a:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}.$$

Ce qui donne :

$$\vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mu \right) + \vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0.$$

Comme $\vec{s}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires

Alors :

$$\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0$$

Ainsi , on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mu \right) = 0$$

On a alors :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mu = K$$

K est le long d'une ligne de courant.

En générale, la constante K change avec la ligne de courant.

Les forces de volume se réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur.

Dans ce cas, on a :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = K \quad (1.5)$$

1.5.3 Ecoulement irrotationnel

Dans les régions d'écoulement, loin des parois solides où le fluide peut être considéré comme non visqueux, l'écoulement est dit irrotationnel et on a alors la condition

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot} \vec{V} = 0. \quad (1.6)$$

$\vec{\Omega}$ représente le vecteur de rotation ou de vortécité .

$\vec{\Omega}$ est, par définition, nul pour un écoulement irrotationnel

Cette condition apporte des simplifications importantes dans les équations du mouvement.

1.5.4 Ecoulement potentiel

On rappelle aussi qu'en mathématique une fonction dont le rotationnel est nul, peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire, car on a toujours :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\phi) = 0.$$

On peut donc réduire :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi \quad (1.7)$$

ϕ représente la potentielle de vitesse.

On déduit que, du à l'existence d'une fonction potentielle, les écoulements irrotationnels sont dit potentielles.

1.6 Ecoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible

On rappelle la forme de l'équation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0.$$

En substituant cette équation dans la définition du potentiel de vitesse .

On a :

$$\nabla(\nabla\phi) = 0$$

Alors

$$\nabla^2\phi = 0.$$

Soit :

$$\Delta\phi = 0. \quad (1.8)$$

Δ indique le laplacien et ∇ l'opérateur gradient .

On dit qu'un écoulement est bidimensionnel si le vecteur vitesse est parallèle à un plan fixe. dans ce l'équation du potentiel de vitesse se réduit à :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.9)$$

Et ϕ étant une fonction potentielle continue à deux variables , alors il existe une fonction ψ dite fonction potentielle conjuguée ou fonction de courant qui vérifie :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad et \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.10)$$

On a aussi pour le potentiel de vitesse :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad et \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.11)$$

En identifiant ces deux systèmes d'équation, on aboutit aux relations suivantes entre ϕ et ψ :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad et \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.12)$$

Ces équation sont connues comme celles de Cauchy-Riemann , qui nous permettent de déduire que ϕ et ψ sont uniformément différentielles dans le domaine de l'écoulement et qui permettent aussi de trouver le potentiel de vitesse à partir de la fonction de courant ou inversement.

1.7 Ecoulement à la base de la théorie de la variable complexe

Des solutions générales pour des écoulements potentiels bidimensionnels de fluide incompressibles existent à base de résolutions mathématiques

De l'équation de Laplace cependant, on notera surtout, que la théorie des variables complexes offre une méthode très puissante pour l'obtention de solution de l'équation de Laplace

Au lieu d considérer φ et ψ comme étant des fonction de x et y , on utilise une nouvelle variable z , qui représente la variable complexe $z = x + iy$

Définissons, maintenant, une fonction f qui a pour argument z .

$$f(z) = f(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) .$$

Cette fonction sera analytique dans le domaine de l'écoulement , de plus :

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv = \zeta(z).$$

Sera aussi analytique dans le plan de l'écoulement. cette propriété très importante , elle nous permet de résoudre notre problème considéré.

1.8 La transformation conforme

Définition:

Une transformation conforme peut être définie informellement comme une transformation géométrique qui préserve les angles orientés.

Autrement dit, c'est une transformation qui ressemble localement à une similitude directe, les similitudes directes sont les translations, les rotations, les homothéties et leurs composées.

Fonction holomorphes(analytiques):

Soit $f(z)$ une fonction qui admet une dérivée, ses parties réelles et imaginaires sont différentiables et u et v vérifient les conditions de Cauchy , $f(z)$ définissant ainsi une fonction analytique.

1.8.1 Quelques transformations classiques:

1) Translation : Une translation correspond à la transformation

$$z \longrightarrow z + a$$

Où a également un nombre complexe , représente le vecteur de translation.

2)Rotation: Une rotation de centre 0 et d'angle θ , correspond à la transformation

$$z \longrightarrow e^{i\theta} z$$

3)Homothétie: Une homothétie de centre 0 et de rapport r , correspond à la transformation

$$z \longrightarrow r z$$

4)Transformation inverse: Transformation inverse est une transformation

$$z \longrightarrow z^{-1}$$

pour z non nul transforme les cercles en cercles ou droite, les lignes en droites ou cercles, selon que l'objet passe ou non par l'origine.

5)Transformation homographique: La transformation est

$$z \longrightarrow \frac{a z + b}{c z + d}$$

avec a, b, c, d des complexes, transforme les cercles ou demi plan en droites et réciproquement.

1.8.2 Transformation de Schwartz -Christoffel

Considérons un polygone (Fig.1.3) dans un plan Ω , ayant pour sommets $A_1, A_2, \dots, A_n$ et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ les points correspondants respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe du plan des λ . (Fig.1.4).

une transformation qui représente l'intérieur d'un polygone en demi-plan supérieur

(ou inférieur) d'un autre plan, la transformation est donné par :

Où

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = A(z - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}...(z - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}. \quad (1.13)$$

$$\Omega = A \int (z - \lambda_1)^{\frac{\lambda_1}{\pi}-1}(z - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}...(z - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}d\lambda + B. \quad (1.14)$$

Où a et b sont des constantes complexe

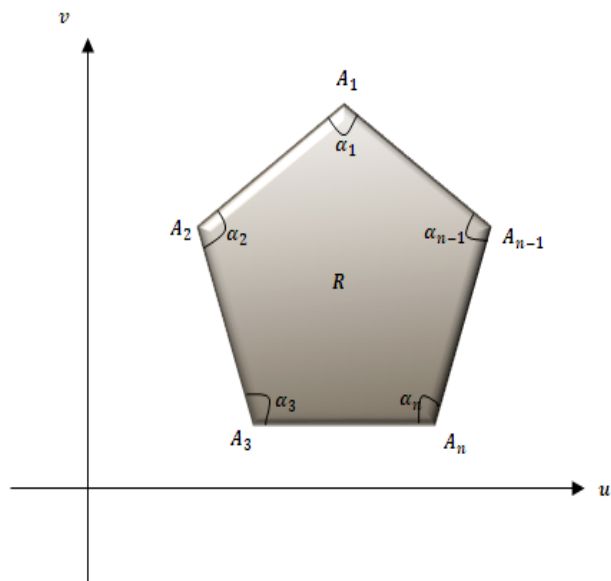


Fig .1.3 :plan variable Ω

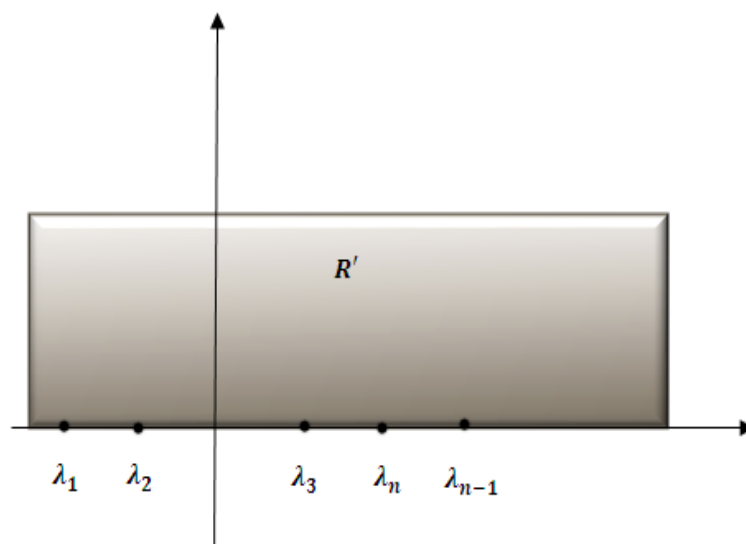


Fig 1.4 : plan variable λ

Chapitre 02

Ecoulement à surface libre au dessus obstacle polygonal

Résumé

Dans ce chapitre, on étudie un problème d'écoulement stationnaire, irrotationnel bidimensionnel à surface libre d'un fluide parfait incompressible.

CHAPITRE 2

Ecoulement à surface libre au dessus obstacle polygonal

2.1 Introduction

Dans l'étude de notre problème , on introduit la théorie des surfaces libres qui considère que l'écoulement est limité partiellement par des parois rigides et par des surfaces libres de formes inconnues. Et pour la résolution , on utilise la vitesse introduite par la méthode de kirchoff, Et on définit une nouvelle variable complexe Ω par :

$$\Omega = \log \left(\frac{Udz}{df} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{U}{q} \right) + i\theta \quad (2.1)$$

Où $z = x + iy$, $f = \phi + i\psi$ et q , θ ont été définies par le module de la vitesse et l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale respectivement .

La propriété de cette variable : c'est que sa partie réelle est constante sur chacune des surfaces libres et sa partie imaginaire est constante sur chaque partie droite de la paroi rigide. Alors le domaine de l'écoulement dans le plan physique est transformé en un polygone dans le plan Ω ..

Sous ces conditions , la solution du problème est exacte , En utilisant la même procé-

ture , le bord du fluide est représenté par une figure droite d'un autre plan d'une certaine variable complexe f . D'après le théorème de Schwarz -Christoffel, il est toujours possible de trouver une transformation conforme qui applique l'intérieur ou l'extérieur d'un polygone plan en un demi-plan d'un autre plan .

Une autre transformation met en correspondance la région indiquée du plan Ω ,ains que celle du plan f sur la moitié inférieure du plan d'une certaine variable complexe λ finalement , on trouve une relation entre Ω et f , à partir de cette dernière , on trouve une expression de f en fonction de z qui est obtenue par intégration .

2.2 Formulation du problème

On suppose un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre où les effets de gravité et tension de surface sont négligés.

Lorsque l'écoulement est symétrique, on peut alors étudier le problème seulement sur le demi-plan supérieur ,et on considère l'axe de symétrie comme ligne de courant Et comme axes de coordonnées, on prend la paroi AO sur l'axe $x'ox$ et la paroi OC sur l'axe $y'oy$ On suppose que l'écoulement à l'infini est uniforme de vitesse U et d'amplitude H

On note par $\zeta = u - iv$, où (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse dans la direction de x et y respectivement et par $f = \phi + i\psi$ la fonction potentielle où ϕ et ψ désignent respectivement la vitesse potentielle et la fonction de courant

On suppose que la pression p et la densité ρ du fluide sont constantes sur la surface libre. Les conditions sont données par l'équation de Bernoulli :

$$\frac{1}{2} |\zeta|^2 + \frac{p}{\rho} = Cte \quad \text{sur } AC \quad (2.2)$$

Où ζ est la vitesse de l'écoulement . L'équation (2.1) implique que la vitesse est constante sur la libre et (2.2) devient :

$$|\zeta| = Cte.$$

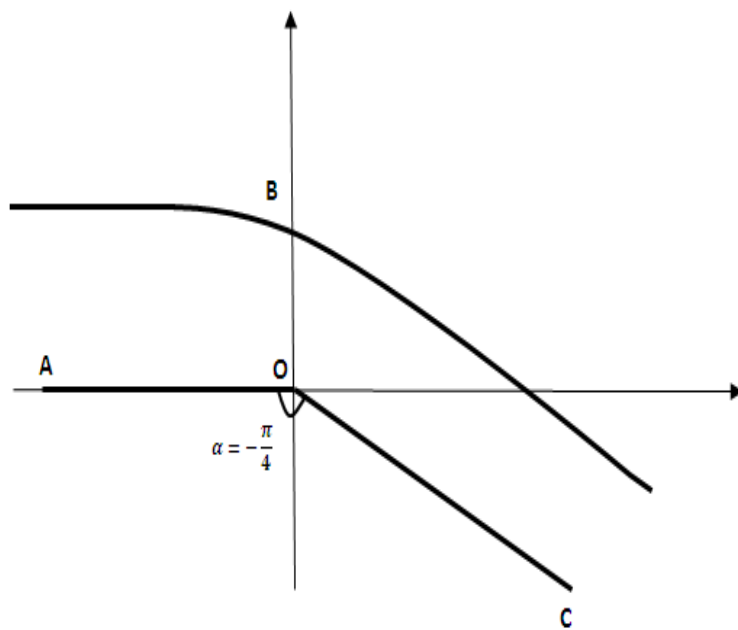


Fig 2.1 : Schéma de l'écoulement dans le plan z

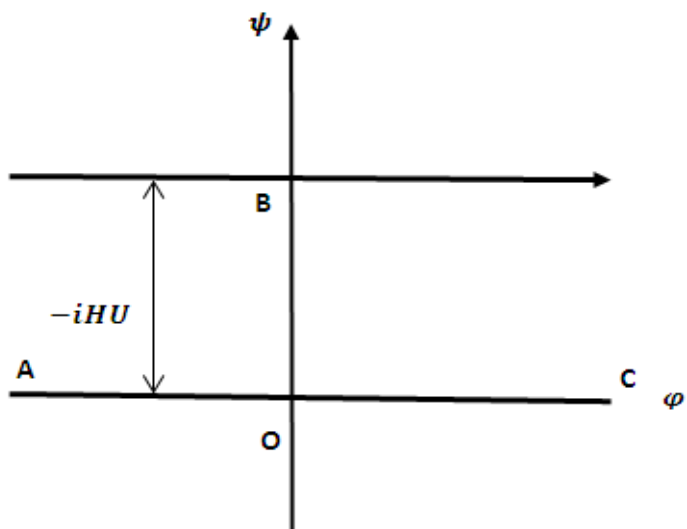


Fig 2.2: La configuration d'écoulement dans le plan potentiel complexe f .

2.3 Résolution du problème

De la transformation, (2-1), on a :

$$\Omega = \log \left(\frac{Udz}{df} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{U}{q} \right) + i\theta \quad (2.3)$$

Par cette transformation, le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable z se transforme en une bande semi-infinie dans le plan Ω (*fig 2.3*)

Nous choisissons $\phi = 0$ au point $(x, y) = (0, 0)$, $\psi = 0$ sur la ligne ABC et $\psi = HU$ sur la ligne de courant AC (*fig 2.2*)

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans le plan Ω au demi-plan inférieur d'un autre plan complexe λ est donnée par le théorème de Schwartz-Christoffel en respectant le sens et l'orientation de l'écoulement .

on choisit $A = 0$, $C = 1$ et B à l'infini sur le plan λ (*fig2.4*), on a alors :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = A (\lambda - 0)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1} (\lambda - 1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}$$

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = A (\lambda)^{-\frac{1}{2}} (\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Par intégration on trouve :

$$\Omega = A \int (\lambda)^{-\frac{1}{2}} (\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}} d\lambda + B \quad (2.4)$$

En faisant un changement de variable $\sigma = 2\lambda - 1$ dans (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \Omega &= A \int \left[\frac{1}{\sqrt{(\sigma + 1)(\sigma - 1)}} d\sigma \right] + B \\ &= A \int \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \end{aligned}$$

D'où

$$\Omega(\lambda) = A \arg \cosh (2\lambda - 1) + B \quad (2.5)$$

Où A et B sont des constantes à déterminer.

pour cette détermination ,on a :

1. pour $\lambda = 1$, $\Omega = -i\frac{\pi}{4}$ l'équation (2.5) donne : $B = -i\frac{\pi}{4}$.

En substituant la valeur de B dans l'équation (2.5) , on trouve :

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[1 + \cosh \left(\frac{\Omega + \frac{i\pi}{4}}{A} \right) \right] \quad (2.6)$$

2. pour $\lambda = 0$, $\Omega = 0$,on obtient $A = -\frac{1}{2}$.

En substituant la valeur de A dans l'équation (2.6), on obtient :

$$\lambda = \frac{1}{2} [1 - \cosh(-4\Omega)] = -\sinh^2(2\Omega) \quad (2.7)$$

On cherche maintenant , une relation entre f et λ qui transforme l'intérieur de la bande infinie du plan f vers le demi plan inférieur du plan λ .

En faisant la correspondance entre les points A , C et O définis sur les deux plans.

On utilise encore,le théorème de Schwartz-Christoffel, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= (\lambda - 0)^{\frac{0}{\pi}-1} (\lambda - 1)^{\frac{0}{\pi}-1} \\ &= (\lambda - 0)^{-1} (\lambda - 1)^{-1} \end{aligned}$$

Par intégration on trouve :

$$f = A' \int (\lambda - 0)^{-1} (\lambda - 1)^{-1} + B' \quad (2.8)$$

En faisant un changement de variable $\sigma = 2\lambda - 1$ dans (2.8) on obtient :

$$f = A' \int \frac{1}{(\sigma^2 - 1)} d\lambda + B'.$$

Où A' et B' sont des constantes à déterminer.

Nous avons $\lambda = \frac{1}{2}$ sur A , ou à partir $f = 0$ et $\lambda = \infty$ sur C , avec $f = -i$

$$f = -\frac{1}{\pi} \log \frac{1-t}{t} \quad (2.9)$$

Après calculs, on trouve une relation entre λ et f :

$$\lambda = \frac{1}{1 - e^{-\pi f}} \quad (2.10)$$

En utilisant la relation $U \frac{dz}{d\lambda} = U \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda}$, nous obtenons :

Nous avons

$$U \frac{dz}{d\lambda} = (\sqrt{\lambda-1} - i\sqrt{\lambda})^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-1}{\pi\lambda(\lambda-1)}$$

On obtient :

$$\frac{dz}{d\lambda} = (\sqrt{\lambda-1} - i\sqrt{\lambda})^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-1}{\pi(\lambda(\lambda-1))} \quad (2.11)$$

En intégrant

$$z = -\frac{1}{\pi} \int \frac{(\sqrt{1-\lambda} - i\sqrt{\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\lambda(\lambda-1)} d\lambda + z_0 \quad (2.12)$$

Sur la surface libre, $f = \phi$, $\phi \geq 0$, donc la forme de surface libre est donnée par :

$$\begin{aligned} x(\phi) &= \text{Re} \left[-\frac{1}{\pi} \int \frac{(\sqrt{1-\lambda} - i\sqrt{\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\lambda(\lambda-1)} d\lambda + x_0 \right] \\ y(\phi) &= \text{Im} \left[-\frac{1}{\pi} \int \frac{(\sqrt{1-\lambda} - i\sqrt{\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\lambda(\lambda-1)} d\lambda + y_0 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(\phi) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{(\sqrt{1-\lambda} - i\sqrt{\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\lambda(\lambda-1)} d\lambda + x_0 \\ y(\phi) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{(\sqrt{1-\lambda} - i\sqrt{\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\lambda(\lambda-1)} d\lambda + y_0 \end{cases}$$

Sont des intégrales qu'on ne peut pas résoudre par les méthodes d'intégration connues.

En intégrant numériquement ,on obtient la forme de la surface libre (Fig 2.5)

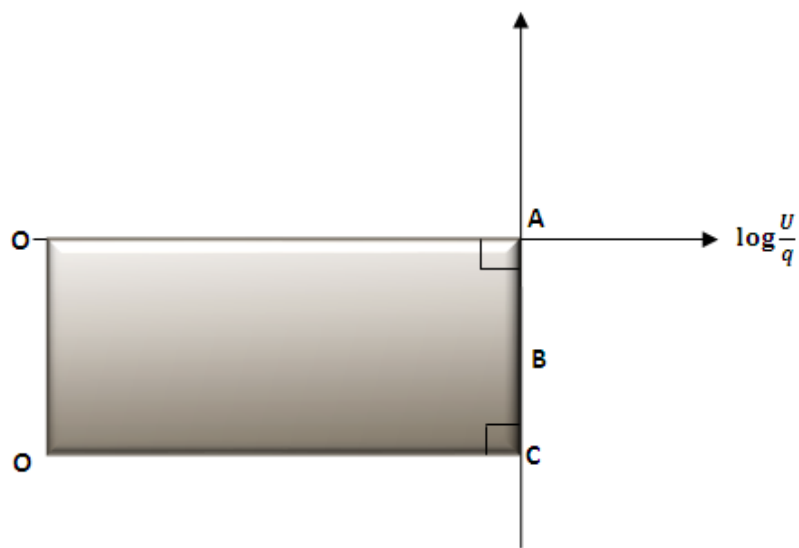


Fig 2.3: Le domaine d'écoulement dans le plan Ω .

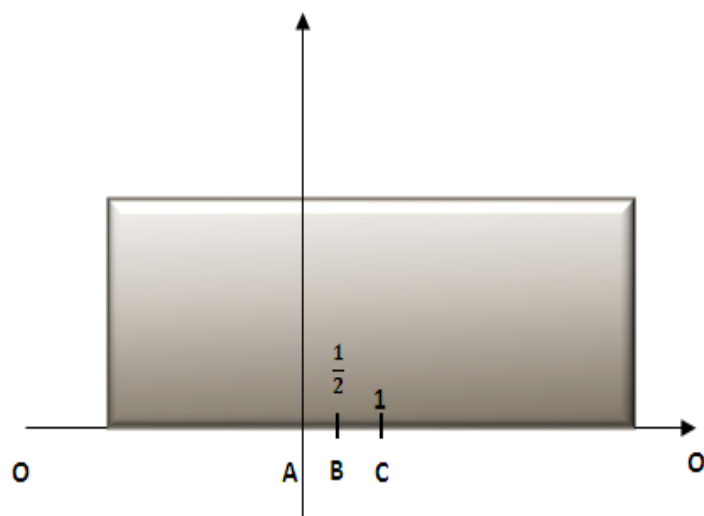


Fig 2.4 : Le domaine d'écoulement dans le plan λ .

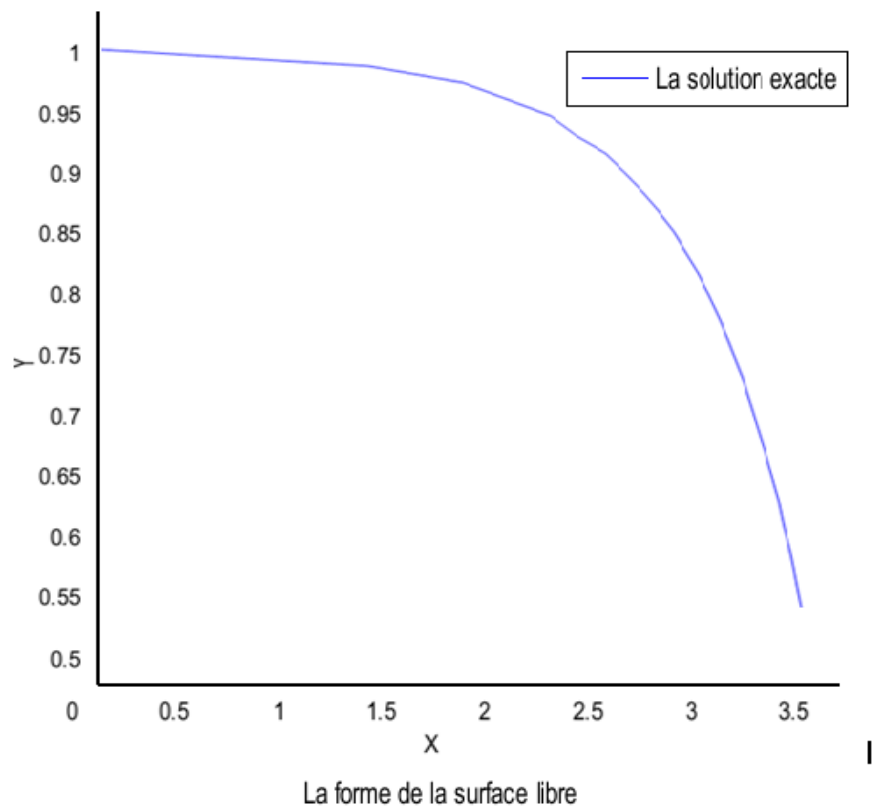


Fig 2.5 : La forme de la surface libre

CHAPITRE 3

Annexe

3.1 Outils mathématiques de la théorie des champs:

Opérateur gradient:

1) Définition: À tout champ scalaire $f(M)$, on associe un champ vectoriel $\overrightarrow{grad}(f)$ tel que:

$$df(M) = \overrightarrow{grad}(f) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

2) Proposition: La circulation d'un gradient est indépendante du chemin suivi.

En particulier sur une courbe fermée, la circulation du gradient est nulle.

3) Expressions analytiques:

En coordonnées cartésiennes : On a en coordonnées cartésiennes dans la base (e_1, e_2, e_3) pour une fonction $f = f(x_1, x_2, x_3)$:

$$(\overrightarrow{grad}(f))_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

En coordonnées cylindriques: On a dans la base (e_r, e_θ, e_z) :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

En coordonnées sphérique: On a dans la base (e_r, e_θ, e_ϕ) :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} e_\phi$$

4)Gradient d'un vecteur: On peut définir le gradient d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ de taille n , c'est une matrice de taille $n \times n$ et on a:

$$(\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{V}))_{i,j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Opérateur divergence:

1)Définition: soit un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ et soit $d\tau$ un élément de volume en tout point M de l'espace. On définit

$$div(\overrightarrow{V}) = \frac{d\phi}{d\tau}$$

où $d\phi$ est le flux élémentaire, sortant du champ $\overrightarrow{V}$ à travers la surface fermée délimitant $d\tau$, $div(\overrightarrow{V})$ représente le flux volumique en M .

L'opérateur divergence construit un champ de scalaire à partir d'un champ de vecteurs.

2)Théorème(théorème de Green _ Ostrogradski): Soit Σ la surface fermée délimitant le volume v , ds le vecteur de surface élémentaire sortant du volume. On a alors pour tout champ de vecteur $\overrightarrow{V}$:

$$\int \int_{\Sigma} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds} = \int \int \int_v div(\overrightarrow{V}) d\tau$$

3)Expressions analytique:

En coordonnées cartésiennes: On a

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques: On a

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Opérateur rotationnel:

1)Définition: Soit un champ vectoriel $\vec{V}$ et soit $\vec{ds}$ un élément de surface en un point M de l'espace, on notant dc le contour élémentaire orienté associé à $\vec{ds}$ selon la règle de Stokes, on définit le rotationnel de $\vec{V}$ en M par:

$$dc = \int_{dc} \vec{V} d\vec{t} = \vec{rot} \vec{V} d\vec{s}$$

L'opérateur rotationnel construit un champ de vecteurs à partir d'un champ de vecteurs

2)Expressions analytique

En coordonnées cartésiennes: On a

$$\vec{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) e_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) e_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) e_3$$

En coordonnées cylindriques: On a

$$\vec{rot} \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] e_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] e_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] e_z$$

3)Proposition: Si un champ de vecteur $\vec{W}$ est à flux conservatif c'est à dire:

$$\operatorname{div} \vec{W} = 0$$

alors il existe un champ de vecteur $\vec{V}$ tel que

$$\vec{W} = \operatorname{rot} \vec{V}$$

Opérateur Laplacien:

1)Définition(Laplacien d'un champ scalaire) : Transforme un champ scalaire en champ scalaire:

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f)$$

2)Expressions analytique:

En coordonnées cartésiennes : On a

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

En coordonnées cylindriques: On a

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

En coordonnées sphérique: On a

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

3) Définition (Laplacien d'un champ vectoriel): Transforme un champ vectoriel en un champ vectoriel:

$$\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{V})) - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V}$$

4) Expression analytique du Laplacien vectoriel:

En coordonnées cartésiennes : On a

$$\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^n \Delta V_{x_i} e_i$$

Opérateur symbolique nabla:

C'est un opérateur de dérivation vectoriel.

Ses composantes en coordonnées cartésiennes sont:

$$(\overrightarrow{\nabla})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On peut écrire le gradient, la divergence et le rotationnel grâce à cet opérateur symbolique:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(f) &= \overrightarrow{\nabla} f \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} &= \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} \\ \text{div}(\overrightarrow{V}) &= \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} \\ \Delta f &= \overrightarrow{V}^2 f \\ \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{V} &= \overrightarrow{V}^2 \overrightarrow{V} \end{aligned}$$

Formulaire relatif aux opérateurs: Soit f un champ scalaire, $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux champs vectoriels:

La divergence d'un gradient est égale au Laplacien:

$$\operatorname{div} \left(\overrightarrow{\operatorname{grad} f} \right) = \Delta f$$

La rotationnel d'un gradient est nul:

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{grad} f} \right) = \overrightarrow{0}$$

La divergence d'un rotationnel est nulle: $\operatorname{div} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot} A} \right) = 0$

Conclusion finale

L'idée principale de ce travail est l'application d'une méthode numérique basé sur l'intégrale de Schwartz Christoffel modifiée pour la résolution d'un problème d'écoulement bidimensionnel à surface libre .Cet intégrale transforme le problème proposé dans un polygone conforme connue plus le traité numériquement par la méthode développée par trefethen..

Bibliographie

- [1] J.Roussel, *Cours de mécanique des fluides*, (7-9,11-13)2005-2006.
- [2] Merzak.DAMOU , *Mécanique des fluides* ,(28-31,71-77) 1996.
- [3] S.Candel,*Mécanique des fluides* cours,Paris 1995.
- [4] Wahiba.DELLOM ,*Résolution numériques d'un problème non linéaire dans un domaine à frontière libre devant un obstacle* ,Thèse magister,2004.
- [5] A.GASMI ,B.BOUDERAH , and H.SERGUINE, *Zero gravity of free surface jet flow*,2007.
- [6] N.Piskounov, *Calcule différentiel et intégral*,Tome1,1980.
- [7] C.Ancey,*Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides*.
- [8] Christophe.RAUFASTE,*Introduction au devoir de Mécanique des fluides*,
(14-19)2010-2011.